

$$8. \int_0^1 \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$\text{Ж: } \pi \sqrt{2} - 4.$$

6

8-§. Ясси фигураларнинг юзларини ҳисоблаш

6.8.1. $y=f(x)$ функция графиги, $x=a$, $x=b$ иккита тўғри чизик ва Ox ўқ билан чегараланган фигура эгри чизикли трапеция дейилади.

Бундай эгри чизикли трапециянинг юзи $f(x) \geq 0$ бўлса,

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx$$

формула бўйича ҳисобланади (24-шакл).

$y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ ($f_2(x) \geq f_1(x)$) эгри чизиклар ва $x=a$ ҳамда $x=b$ иккита тўғри чизик билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

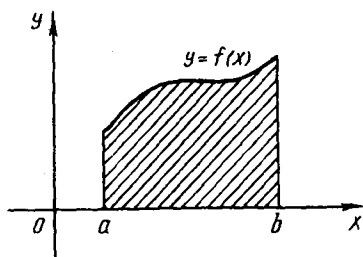
формула бўйича ҳисобланади (25-шакл).

Агар эгри чизикли трапеция $x=f(y)$ функция графиги, $y=c$, $y=d$ тўғри чизиклар ва Oy ўқ билан чегараланган бўлса, унинг юзи $f(y) \geq 0$ учун

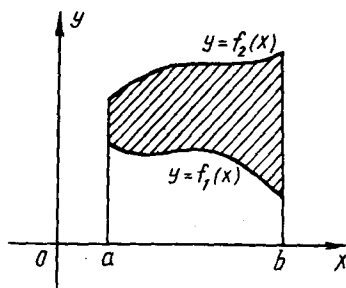
$$S = \int_c^d f(y) dy = \int_c^d x dy$$

формула бўйича ҳисобланади (26-шакл).

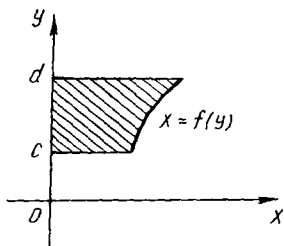
$x_1=f_1(y)$ ва $x=f_2(y)$ ($f_2(y) \geq f_1(y)$) эгри чизиклар, $y=c$ ва $y=d$ иккита тўғри чизик билан чегараланган фигура юзи



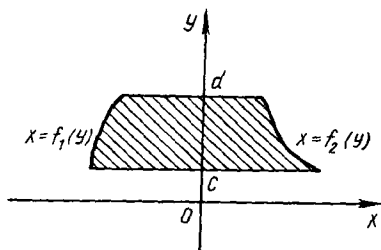
24-шакл



25-шакл



26- шакл



27- шакл

$$S = \int_c^d (f_2(y) - f_1(y)) dy$$

формула бўйича ҳисобланади (27- шакл).

6.8.2. Агар эгри чизик $x=x(t)$, $y=y(t)$ параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, у ҳолда шу эгри чизик, $x=a$, $x=b$ тўғри чизиклар ва Ox ўқ билан чегараланган эгри чизикли трапециянинг юзи

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} y(t) dx(t)$$

формула бўйича ҳисобланади, бунда t_1 ва t_2 $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$ ($y(t) \geq 0$) тенгламалардан аниқланади.

6.8.3. $r=r(\varphi)$ функция графиги ва $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ иккита нур билан чегараланган фигура эгри чизикли сектор дейилади, бунда φ ва r — кутб координаталари (28- шакл). Эгри чизикли секторнинг юзи

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$$

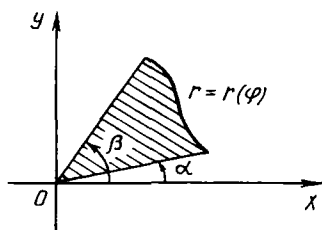
формула бўйича ҳисобланади.

1- м и с о л. $y = \frac{x^2}{2}$ парабола, $x=1$, $x=3$ тўғри чизиклар ва Ox

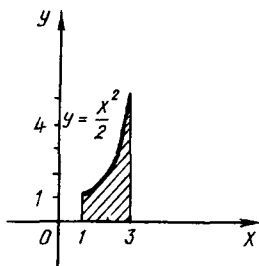
ўқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

Е ч и ш. Аввал шаклни чизамиз (29- шакл). Изланаётган юз ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$S = \int_a^b y dx = \int_1^3 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_1^3 = \frac{1}{6} (3^3 - 1^3) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} \text{ (кв. бирл.)}.$$



28- шакл



29- шакл

2- м и с ол. $x=2-y-y^2$ эгри чизик ва ординаталар ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

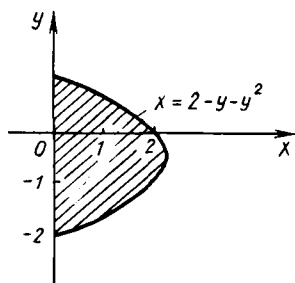
Е ч и ш. Фигура Oy ўқка ёпишиб туради (30- шакл), унинг юзи $S = \int_c^d x dy$ формула бўйича ҳисобланади.

$$\begin{aligned} S &= \int_c^d x dy = \int_{-2}^1 (2-y-y^2) dy = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - \frac{4}{2} + \frac{8}{3} \right) = \frac{9}{2} \text{ (кв. бирл.)}. \end{aligned}$$

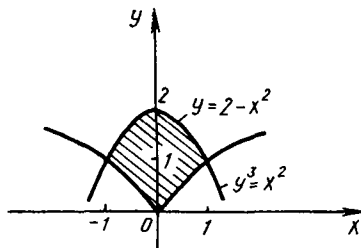
3- м и с ол. $y=2-x^2$ ва $y^3=x^2$ эгри чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

Е ч и ш. Берилган тенгламалар системасини ечиб, эгри чизикларнинг кесишиш нукталарини топамиз: $A(-1, 1)$ ва $B(1, 1)$. Интеграллаш чегаралари бўлиб $x=-1$ ва $x=1$ хизмат қилади.

Фигура юзи $S = \int_c^d (f_2(x) - f_1(x)) dx$ формула бўйича ҳисобланади (31- шакл).



30- шакл



31- шакл

$$S = \int_c^d (f_2(x) - f_1(x)) dx = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2}) dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} \right) \Big|_{-1}^1 = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5} \right) -$$

$$- \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \right) = \frac{16}{15} + \frac{16}{15} = \frac{32}{15} \text{ (кв. бирл.)}.$$

4- м и с о л. Эллипсининг

$$\begin{cases} x = acost, \\ y = bsint \end{cases}$$

параметрик тенгламаларидан фойдаланиб, унинг юзини топинг.

Е ч и ш. Эллипсининг симметриклигидан фойдаланиб, излана-ётган юзнинг тўртдан бирини ҳисоблаймиз (32- шакл). $x = acost$ тенгламада $x=0$ ва $x=a$ деб олсак, ушбу интеграллаш чегаралари-га эга бўламиз: $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = 0$. Ҳисоблаймиз:

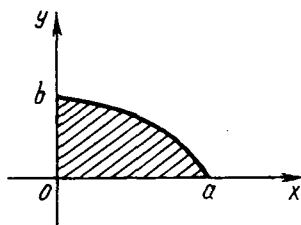
$$\frac{1}{4} S = \int_{t_1}^{t_2} y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 bsint (-asint) dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt =$$

$$= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \frac{ab}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4}.$$

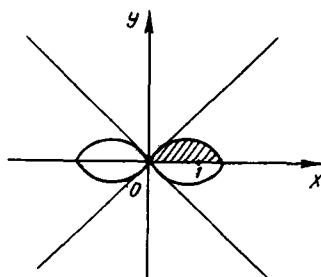
Демак, бутун фигуранинг юзи

$$S = \pi ab \text{ (кв. бирл.)}.$$

5- м и с о л. $r^2 = 2\cos 2\varphi$ Бернулли лемнискатаси билан чегараланган фигура юзини топинг.



32- шакл



33- шакл

Е ч и ш. Эгри чизикнинг симметриклигидан фойдаланиб, олдин изланаётган юзнинг тўртдан бирини топамиз (33-шакл). Изланаётган юзнинг тўртдан бир қисми φ нинг 0 дан $\frac{\pi}{4}$ гача ўзгаришига тўғри келади.

Фигура юзини куйидаги формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Шундай қилиб, изланаётган юз: $S = \frac{1}{2}$ (қв. бирл.).

8- дарсхона топшириғи

Берилган чизиклар билан чегараланган фигуралар юзларини ҳисобланг:

1. $y = 4x - x^2$ ва Ox ўқ билан. Ж: $\frac{32}{3}$ (қв. бирл.).

2. $y = (x-1)^2$ ва $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ Ж: $\frac{10}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(3 + \sqrt{8}) \approx 4,58$ (қв. бирл.).

3. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ (бир аркаси) ва $y = 0$. Ж: 12π (қв. бирл.).

4. $r = 2a\cos\varphi$ ва $r = 2a\sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Ж: $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a^2$ (қв. бирл.).

5. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$. Ж: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ (қв. бирл.).

6. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$. Ж: $\frac{125}{6}$ (қв. бирл.).

7. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = x$, $y = -x\sqrt{3}$. Ж: $\frac{25\pi}{24}$ (қв. бирл.).

8. $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$. Ж: $\frac{72\sqrt{3}}{5}$ (қв. бирл.).

8- мустақил иш

Берилган чизиклар билан чегараланган фигуралар юзларини ҳисобланг:

1. $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$. Ж: 4,5 (кв. бирл.).
2. $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 4$ (I чорак). Ж: $\frac{41}{2} \arcsin \frac{9}{41} + 20 \ln 0,8$ (кв. бирл.).
3. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. Ж: $\frac{3}{8} \pi a^2$ (кв. бирл.).
4. $x = 2t$, $y = 4t^2 - 6t$ ва $y = 0$. Ж: $\frac{9}{2}$ (кв. бирл.).
5. $r = a \sin 3\varphi$ (битта ҳалка). Ж: $\frac{\pi a^2}{12}$ (кв. бирл.).
6. $r = a \cos \varphi$, $r = 2a \cos \varphi$. Ж: $\frac{3}{2} \pi a^2$ (кв. бирл.).

9-§. Эгри чизик ёйлари узунликларини ҳисоблаш

Агар тўғри бурчакли координаталарда $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада силлиқ (яъни $y' = f'(x)$ ҳосила узлуксиз) бўлса, у ҳолда бу эгри чизик мос ёйнинг узунлиги

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

формула бўйича ҳисобланади.

Эгри чизик

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, бу эгри чизикнинг $t \in [t_1, t_2]$ параметрнинг монотон ўзгаришига мос ёйнинг узунлиги

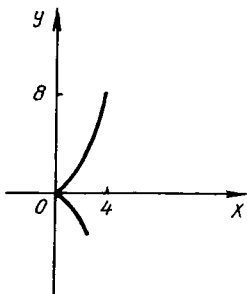
$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

формула билан ҳисобланади.

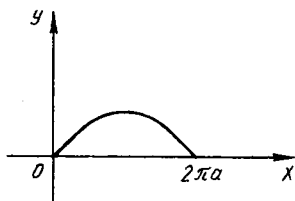
Агар силлиқ эгри чизик қутб координаталарда $r = r(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$) тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда ёй узунлиги

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

формула билан ҳисобланади.



34- шакл



35- шакл

1- мисол. $y^2 = x^3$ ярим кубик параболанинг координаталар бошидан $A(4, 8)$ нуктагача бўлган ёйи узунлигини топинг.

Ечиш. Аввал шаклни чизамиз (34- шакл). Парабола тенгламасини дифференциаллаймиз:

$$y = x^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Формулага кўра:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \\ &= \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \text{ (узун. бирл.)}. \end{aligned}$$

2- мисол. Битта циклоида узунлигини топинг:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Ечиш. Циклоиданинг барча аркаси бир хил, қайси арка бўйлаб t параметр 0 дан 2π гача ўзгарса, ўша аркани оламиз (35- шакл):

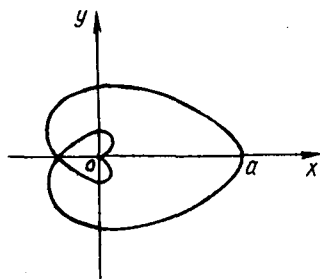
$$x' = a(1 - \cos t), \quad y' = a \sin t.$$

Шу сабабли:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a \text{ (узун. бирл.)}. \end{aligned}$$

3- мисол. $r = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$ ёпик эгри чизикнинг узунлигини ҳисобланг.

Ечиш. Берилган функция жуфт функция. Шу сабабли берилган эгри чизик кутб ўқига нисбатан симметрик. Нукта бутун эгри



36- шакл

чизикни φ 0 дан 4π гача ўзгарганда чизади, шунга кўра эгри чизикнинг ярми φ 0 дан 2π гача ўзгарганда чизилади (36- шакл).

$r' = a \sin^3 \frac{\varphi}{4} \cdot \cos \frac{\varphi}{4}$. Демак,

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^8 \frac{\varphi}{4} + a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{4}} d\varphi = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{\varphi}{4} d\varphi = -4a \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{4} d\left(\cos \frac{\varphi}{4}\right) = \\ &= -4a \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \frac{\varphi}{4}) d\left(\cos \frac{\varphi}{4}\right) = -4a \left(\cos \frac{\varphi}{4} - \frac{\cos^3 \frac{\varphi}{4}}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 4a \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}a. \text{ Демак, } l = \frac{16}{3}a \text{ (узн. бирл.)}. \end{aligned}$$

9- дарсхона топшириғи

Эгри чизиклар ёйлари узунликларини ҳисобланг:

1. $y = \ln \sin x$, $x = \frac{\pi}{3}$ дан $x = \frac{\pi}{2}$ гача. Ж: $\frac{1}{2} \ln 3$ (узн. бирл.).
2. $y = \frac{2}{5}x^4 \sqrt{x} - \frac{2}{3} \sqrt[4]{x^3}$ абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқталари орасидаги. Ж: $\frac{20}{9} \sqrt{\frac{5}{3}}$ (узн. бирл.).
3. $x = \frac{1}{3}t^3 - t$, $y = t^2 + 2$, $t = 0$ дан $t = 3$ гача. Ж: 12 (узн. бирл.).
4. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $t = 0$ дан $t = \ln \pi$ гача. Ж: $\sqrt{2} (\pi - 1)$ (узн. бирл.).
5. $r = \varphi^2$, $\varphi = 0$ дан $\varphi = \pi$ гача. Ж: $[(\pi^2 + 4) \sqrt{\pi^2 + 4} - 8] \cdot \frac{1}{3}$ (узн. бирл.).
6. $r = a \sin \theta$. Ж: πa (узн. бирл.).

Эгри чизиклар ёйлари узунликларини ҳисобланг:

1. $y = \frac{x^2}{2}$, $x=0$ дан $x=1$ гача. Ж: $0,5 [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$ (узун. бирл.).
2. $y = 1 - \ln \cos x$, $x=0$ дан $x = \frac{\pi}{6}$ гача. Ж: $\frac{1}{2} \ln 3$ (узун. бирл.).
3. $x = 8 \sin t + 6 \cos t$, $y = 6 \sin t - 8 \cos t$, $t=0$ дан $t = \frac{\pi}{2}$ гача. Ж: 5π (узун. бирл.).
4. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$. Ж: $16a$ (узун. бирл.).
5. $r = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$, $\varphi=0$ дан $\varphi = \frac{\pi}{2}$ гача. Ж: $\frac{a}{8}(2\pi + 3\sqrt{3})$ (узун. бирл.).
6. $r = 1 - \cos \varphi$. Ж: 8 (узун. бирл.).

10- §. Ҳажмларни ҳисоблаш

6.10.1. Агар $S(x)$ юз жисмнинг Ox ўқка перпендикуляр текислик билан кесишишидан ҳосил бўлган кесими бўлиб, $[a, b]$ кесмада узлуксиз функция бўлса, жисмнинг ҳажми

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

формула билан ҳисобланади.

6.10.2. $y=f(x)$ эгри чизик ва $x=a$, $x=b$, $y=0$ тўғри чизиклар билан чегараланган эгри чизикли трапеция Ox ўқи атрофида айлантирилса, y ҳолда айланиш жисмининг ҳажми

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

формула билан ҳисобланади.

Агар шу фигуранинг ўзи Oy ўқи атрофида айлантирилса, x ҳолда айланиш жисмининг ҳажми

$$V = 2\pi \int_a^b xy dx$$

формула билан ҳисобланади.

6.10.3. Агар $y_1=f_1(x)$ ва $y_2=f_2(x)$ (бунда $f_1(x) \geq f_2(x)$) эгри чизиклар ҳамда $x=a$, $x=b$ тўғри чизиклар билан чегараланган фигура Ox ўқи атрофида айланса, айланиш жисмининг ҳажми

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

формула бўйича ҳисобланади.

Агар шу фигуранинг ўзи Oy ўқ атрофида айланса, айланиш жисмининг ҳажми

$$V = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1) dx$$

формула бўйича ҳисобланади.

6.10.4. Агар эгри чизикли трапеция $x=f(y)$ функция графиги, $y=c$, $y=\alpha$ тўғри чизиклар ва Oy ўқи билан чегараланса, бу фигуранинг Oy ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмининг ҳажми

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

формула бўйича ҳисобланади.

Агар шу фигуранинг ўзи Ox ўқи атрофида айланса, айланиш жисмининг мос ҳажми

$$V = 2\pi \int_c^d xy dy$$

формула бўйича аниқланади.

6.10.5. Агар $x_1=f_1(y)$ ва $x_2=f_2(y)$ (бунда $x_2 \geq x_1 \geq 0$) эгри чизиклар ва $y=c$, $y=d$ тўғри чизиклар билан чегараланган фигура Oy ўқи атрофида айланса, у ҳолда айланиш жисмининг ҳажми

$$V = \pi \int_c^d (x_2^2 - x_1^2) dy$$

формула бўйича топилади.

Агар шу фигуранинг ўзи Ox ўқи атрофида айланса, у ҳолда айланиш жисмининг мос ҳажми ушбуга тенг бўлади:

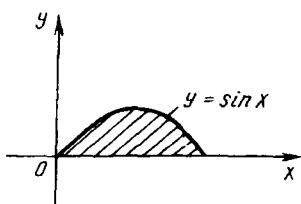
$$V = 2\pi \int_c^d y(x_2 - x_1) dy.$$

6.10.6. Агар эгри чизик параметрик ёки кутб координаталарда берилса, у ҳолда келтирилган формулаларда мос ўринга қўйишларини бажариш керак бўлади.

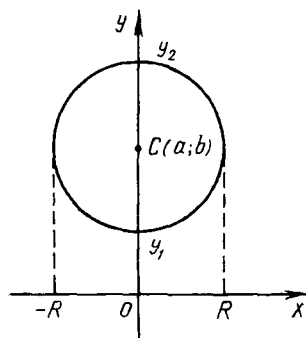
1-мисол. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиднинг ҳажмини топинг.

Ечиш. Эллипсоиднинг Ox ўқка перпендикуляр бирор текислик билан кесишдан ҳосил бўлган кесимининг ярим ўқлари

$$b_1 = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{ва} \quad c_1 = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$



37- шакл



38- шакл

бўлган

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$$

эллипсидир. Демак, кесим юзи (8- §, 4- мисол):

$$S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi b c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

бунда x ўзгарувчи — a дан a гача ўзгаради. Шунга кўра эллипсоиднинг ҳажми ушбуга тенг:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a S'(x) dx = \pi b c \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b c \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \\ &= \pi b c \left[\left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) - \left(-a + \frac{a^3}{3a^2}\right)\right] = \frac{4}{3} \pi a b c \quad (\text{куб бирл.}). \end{aligned}$$

2- мисол. $y = \sin x$ синусоиданинг битта ярим тўлкини ва Ox ўқнинг $[0, \pi]$ кесмаси билан чегараланган фигуранинг а) Ox ўқи атрофида ва б) Oy ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган jismlarнинг ҳажмини ҳисобланг (37- шакл).

$$\begin{aligned} \text{Е ч и ш. а) } V &= \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} (\pi) = \frac{\pi^2}{2} \quad (\text{куб бирл.}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad V &= 2\pi \int_0^{\pi} xy dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} u=x, du=dx \\ dv=\sin x dx, v=-\cos x \end{array} \right\} = 2\pi \left(-x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right) = \\
 &= 2\pi (-\pi \cos \pi + \sin x \Big|_0^{\pi}) = 2\pi^2 (\text{куб. бирл.}) .
 \end{aligned}$$

3-мисол. $x^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ ($b > R$) доиранинг Ox ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган торнинг ҳажмини топинг (38-шакл).

Ечиш. $x^2 + (y-b)^2 = R^2$ айлана тенгламасидан:

$$y_1 = b - \sqrt{R^2 - x^2},$$

$$y_2 = b + \sqrt{R^2 - x^2},$$

Шунинг учун

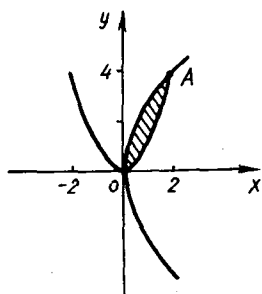
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_{-R}^R [(b + \sqrt{R^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{R^2 - x^2})^2] dx = \\
 &= 4\pi b \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = R \sin t, \\ dx = R \cos t dt, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline -R & -\frac{\pi}{2} \\ \hline R & \frac{\pi}{2} \\ \hline \end{array} \right\} = \\
 &= 4\pi b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} \cdot R \cos t dt = \\
 &= 4\pi b R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2\pi b R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \\
 &= 2\pi b R^2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 b R^2 (\text{куб. бирл.}).
 \end{aligned}$$

4-мисол. $y = x^2$ ва $8x - y^2$ параболалар билан чегараланган фигуранинг Oy ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг (39-шакл).

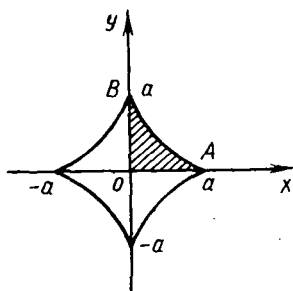
Ечиш.

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = 8x \end{cases}$$

тенгламалар системасидан параболаларнинг кесишиш нукталарини топамиз: $O(0, 0)$ ва $A(2, 4)$.



39- шакл



40- шакл

$x_2(y) = \sqrt{y} \geq x_1(y) = \frac{y^2}{8}$ га эгамиз, ўзгарувчи y 0 дан 4 гача ўзгаради. Демак,

$$V = \pi \int_c^d (x_2^2 - x_1^2) dy = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^4}{64} \right) dy =$$

$$= \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{320} \right) \Big|_0^4 = \pi \left(8 - \frac{32}{10} \right) = \frac{24\pi}{5} \text{ (куб бирл.)}.$$

5- м и с о л. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ астроида билан чегараланган фигуранинг Ox ўқи атрофида айлантирилишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг (40- шакл).

Е ч и ш. Изланаётган ҳажм OAB фигурани айлантиришдан ҳосил бўлган ҳажмнинг иккиланганига тенг. Шунинг учун

$$V = 2\pi \int_0^a y^2 dx.$$

Ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$V = 2\pi \int_0^a y^2 dx = \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ dx = -3a \cos^2 t \cdot \sin t dt, \\ y' = a \sin^3 t. \end{cases}$$

x	t
0	$\frac{\pi}{2}$
a	0

$$= 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \sin^6 t (-3a \cos^2 t \sin t) dt = 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos^2 t dt =$$

$$= -6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t d(\cos t) = -6\pi a^3 \left(\frac{1}{3} \cos^3 t - \frac{3}{5} \cos^5 t + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{7} \cos^7 t - \frac{1}{9} \cos^9 t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) = \frac{32}{105} \pi a^3 \text{ (куб бирл.)}.$$

10- дарсхона топшириғи

1. $x=2$ ва $x=3$ текисликлар билан $x^2+y^2+z^2=16$ шардан қирқилган шар қатламининг ҳажмини ҳисобланг: Ж: $\frac{29}{3}\pi$ (куб. бирл.)

2. Координата ўқлари ва $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ парабола билан чегараланган юзни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг. Ж: $\frac{\pi a^3}{15}$ (куб бирл.) .

3. $y=\sin x$ синусоида ёйи, ординаталар ўқи ва $y=1$ тўғри чизик билан чегараланган фигурани Oy ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ж: $\frac{\pi(\pi^2-8)}{4}$ (куб бирл.) .

4. $y=\frac{1}{4}x^2+2$ парабола ва $5x-8y+14=0$ тўғри чизик билан чегараланган фигурани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг. Ж: $\frac{891\pi}{1280}$ (куб. бирл.) .

5. Ушбу $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ циклоиданинг бир аркасини Ox ўқи ат-

рофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг. Ж: $5a^3\pi^2$ (куб бирл.).

10- мустақил иш

1. $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}$ ва $z=1$ сиртлар билан чегараланган жисм ҳажмини ҳисобланг. Ж: $\pi\sqrt{2}$ (куб бирл.).

2. а) $y=\frac{64}{x^2+16}$ ва $x^2=8y$, б) $y^2=x$ ва $x^2=y$ чизиклар билан чегараланган фигураларни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ж: а) $\frac{16\pi}{5}(5\pi+8)$ (куб. бирл.); б) $0,3\pi$ (куб. бирл.) .

3. а) $y=x^3$, $y=0$, $x=2$; б) $x^2-y^2=4$, $y=\pm 2$ чизиклар билан чегараланган фигурани Oy ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг. Ж: а) $\frac{64}{5}\pi$ (куб. бирл.);

б) $\frac{64}{3}\pi$ (куб. бирл.) .